



۱) رأس سهمی $y = -ax^2 + ax + 2$ روی سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b - a$ چقدر است؟

- ۱) -۶ ۲) ۶ ۳) -۱۸ ۴) ۱۸

۲) نمودار تابع $y = 3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3}$ در ناحیه دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{18}$ ۲) $-\frac{5}{18}$ ۳) $-\frac{7}{6}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۳) معادله $x^2 + ax - b^2 - 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است. حدود a کدام است؟

- ۱) $a > 1 + ab$ ۲) $a < 1 + ab$ ۳) هیچ مقدار a ۴) هر مقدار a

۴) معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 - 6x + a = 0$ بعد از استفاده از روش مربع کامل به فرم $(x - 1)^2 = b$ می‌رسد. حاصل $a + 3b$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵) معادله‌ی درجه‌ی دوم $x(ax - 20) = -25$ دارای ریشه‌ی مضاعف است. مقدار ریشه‌ی مضاعف کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) -۴ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2}$

۶) به ازای چند مقدار a ، سهمی $y = ax^2 + (3 + 2a)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

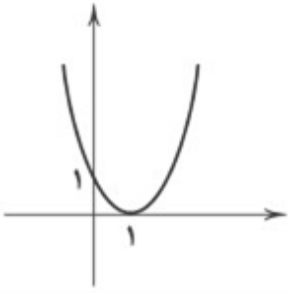
- ۱) هیچ مقدار a ۲) تمام مقادیر a ۳) ۱ ۴) ۲

۷) کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟

- ۱) $x = 2$ ۲) $x = 2/5$ ۳) $x = 3$ ۴) $x = 3/5$



۸ نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax + b$ به صورت زیر می‌باشد. حاصل $a + b$ کدام است؟



- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۹ وقتی خواهر نیکا به دنیا آمد، نیکا ۵ ساله بود. اگر اکنون حاصل ضرب سن دو خواهر ۱۲۶ باشد، ۵ سال دیگر مجموع سن آن‌ها چقدر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۱۰ اگر معادله‌ی $mx^2 + (m-1)x - 1 = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد، تعداد جواب‌های معادله‌ی $mx^2 - 2x + 3m = 0$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۱۱ عبارت $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}$ برای چه x ‌هایی تعریف می‌شود؟

- ۱ (۱) $x \in \emptyset$ ۲ (۲) $x \in \mathbb{R}$ ۳ (۳) $-1 < x < 1$ ۴ (۴) $0 < x < 2$

۱۲ اگر نقطه‌ی $(-2, 6)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y = -2x^2 + ax + b$ باشد، مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۹۶۴ ۲ (۲) ۹۰۰ ۳ (۳) ۶۸ ۴ (۴) ۳۸۸

۱۳ اگر مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^2 - mx + 10}{2x - 3} \leq 0$ با فرض $x > \frac{3}{2}$ بازه $[a, 5]$ باشد، مقدار $a \times m$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۷ ۲ (۲) ۷ ۳ (۳) ۱۴ ۴ (۴) -۱۴

۱۴ اگر مجموعه جواب نامعادله‌های $a < \frac{-2x+1}{5} < 3$ و $b < x < -1$ یکسان باشند، $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) $3/7$ ۲ (۲) $4/3$ ۳ (۳) $-6/4$ ۴ (۴) $-7/2$

۱۵ اگر $a(5-a) = 2$ باشد، حاصل عبارت $(a-8)(a-4)(a-1)(a+3)$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۹۶ ۲ (۲) -۵۲ ۳ (۳) ۵۲ ۴ (۴) ۹۶

۱۶ خط $x = -1$ محور تقارن سهمی $y = ax^2 + 3x + c$ است. اگر رأس سهمی روی خط $y = 1$ قرار داشته باشد، مقدار ac کدام است؟

- ۱ (۱) $5/75$ ۲ (۲) $3/75$ ۳ (۳) $-3/25$ ۴ (۴) $-5/25$



۱۷) اگر محیط مربعی $4\sqrt{10}$ باشد، طول قطر مربع چند است؟

$2\sqrt{5}$ (۴)

$2\sqrt{10}$ (۳)

$4\sqrt{5}$ (۲)

$\sqrt{10}$ (۱)

۱۸) معادله $7x^2 - 6x + k = 0$ به ازای مقدار مشخصی از k ریشه مضاعف دارد. مقدار این ریشه مضاعف چند است؟

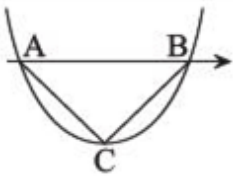
$\frac{3}{7}$ (۴)

$\frac{9}{7}$ (۳)

$\frac{7}{3}$ (۲)

$\frac{7}{9}$ (۱)

۱۹) نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ شکل زیر است. مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد، مقدار $b^2 - 4ac$ کدام است؟



$\frac{48}{9}$ (۴)

۱۸ (۳)

۱۲ (۲)

$\frac{64}{3}$ (۱)

۲۰) معادله یک سهمی که از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد و رأس آن $\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix}$ است به صورت $y = ax^2 + bx + c$ حاصل، $b - a$ کدام است؟

۳ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = -ax^2 + ax + 2 \Rightarrow s\left(\frac{1}{2}, \frac{a^2 + 4a}{4a}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{a}{4} + 2\right)$$

$$y = 2bx^2 - bx - 1 \Rightarrow s\left(\frac{1}{4}, \frac{b^2 + 4b}{-4b}\right) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{b}{4} - 1\right)$$

$$2b\left(\frac{1}{4}\right) - b\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{a}{4} + 2 \Rightarrow \frac{a}{4} = -3 \Rightarrow a = -12$$

$$-\frac{a}{16} + \frac{a}{4} + 2 = -\frac{b}{4} - 1 \Rightarrow \frac{12}{16} = -\frac{b}{4} \Rightarrow b = -6$$

$$b - a = -6 - (-12) = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط $x < 0$ و $y = -x$ بر سهمی مماس است. پس معادله تقاطع جواب مضاعف منفی

$$3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3} = -x \Rightarrow 3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0 \quad \text{دارد:}$$

$$\Rightarrow \Delta = 4m^2 - 12m - 16 = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = (m - 4)(m + 1) = 0 \Rightarrow m = 4 \text{ یا } -1$$

جواب مضاعف باید منفی باشد، پس m باید مثبت باشد.

$$\Rightarrow m = 4 \Rightarrow \text{سهمی: } y = 3x^2 + 7x + \frac{16}{3}$$

طول رأس این سهمی $x_s = -\frac{7}{6}$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + ax - b^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = a \\ c = -b^2 - 1 \end{cases}$$

شرط داشتن دو

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow a^2 - 4(1)(-b^2 - 1) > 0$$

ریشه ی حقیقی متمایز

$$\Rightarrow a^2 + 4b^2 + 4 > 0$$

عبارت $a^2 + 4b^2 + 4$ همواره مثبت است چرا که عبارت a^2 و b^2 همواره غیرمنفی هستند، پس به ازای همه ی مقادیر a و b رابطه ی فوق برقرار است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴

$$3x^2 - 6x + a = 0 \xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{طرفین بر ۳}} x^2 - 2x + \frac{a}{3} = 0$$

$$\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = (-1)^2 = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = -\frac{a}{3} + 1$$

به طرفین عدد را اضافه می کنیم.

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 1 - \frac{a}{3} \\ (x-1)^2 = b \end{cases} \Rightarrow 1 - \frac{a}{3} = b$$

از مقایسه با صورت سؤال داریم:

$$1 - \frac{a}{3} = b \xrightarrow{\times 3} 3 - a = 3b \Rightarrow 3b + a = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵

$$x(ax - 20) = -25 \Rightarrow ax^2 - 20x + 25 = 0$$

شرط داشتن

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-20)^2 - 4(a)(25) = 0$$

ریشه ی مضاعف

$$\Rightarrow 400 - 100a = 0 \Rightarrow -100a = -400 \Rightarrow a = \frac{-400}{-100} = 4 \xrightarrow{\text{جایگزین}} 4x^2 - 20x + 25 = 0$$

$$\Rightarrow \text{ریشه ی مضاعف } x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-20)}{2(4)} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون از ربع سوم نباید بگذرد، پس $a > 0$ و چون یکی از ریشه ها صفر است باید ریشه دیگر مثبت باشد.

یعنی: $x = \frac{-(3+2a)}{a} \xrightarrow{a>0} 3+2a < 0 \Rightarrow a < \frac{-3}{2}$ نمیگذرد.

$$m > 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تابع دارای کمترین مقدار است پس:

$$\min = 2 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow -\frac{144 - 4m(5m-1)}{4m} = 2 \Rightarrow \frac{36 - m(5m-1)}{m} = -2$$

$$36 - 5m^2 + m = -2m \Rightarrow 5m^2 - 3m - 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -2/4 \text{ ق ق} \\ m = 3 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{محور تقارن: } x = -\frac{(-12)}{2m} = \frac{12}{6} = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مختصات نقطه ی $(0, 1)$ را در ضابطه تابع جایگذاری می کنیم.

$$f(0) = 1 \Rightarrow 0^2 + a(0) + b = 1 \Rightarrow b = 1$$

مختصات نقطه ی $(1, 0)$ و $b = 1$ را در ضابطه تابع جایگذاری می کنیم.

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^2 + a(1) + 1 = 0 \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

اکنون حاصل $a + b$ را به دست می آوریم.

$$a + b = -2 + 1 = -1$$



۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر سن کنونی نیکا را x در نظر بگیریم، سن خواهرش که ۵ سال از او کوچکتر است برابر با $(x - 5)$ است، در نتیجه:

$$x(x - 5) = 126 \Rightarrow x^2 - 5x - 126 = 0 \Rightarrow (x + 9)(x - 14) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \text{ (غ ق ق)} \\ x = 14 \end{cases}$$

پس اکنون نیکا ۱۴ سال و خواهرش ۹ سال سن دارد و ۵ سال دیگر مجموع سن آنها برابر است با:

$$(14 + 5) + (9 + 5) = 19 + 14 = 33$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۰

$$mx^2 + (m - 1)x - 1 = 0$$

شرط ریشه مضاعف

$$\xrightarrow{\Delta=0} (m - 1)^2 - 4(m)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 + 4m = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m + 1)^2 = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$mx^2 - 2x + 3m = 0 \xrightarrow{m=-1} -x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(-1)(-3) = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد.}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $a^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$ برای $a > 0$ تعریف می‌شود.

۱۱

$$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۲

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} x_s = -\frac{b}{2a} \\ y_s = f\left(-\frac{b}{2a}\right) \end{cases} \quad \text{یادآوری:}$$

$$y = -2x^2 + ax + b$$

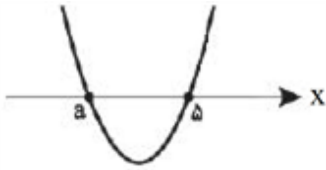
$$\xrightarrow{S(-2, 6)} \begin{cases} -2 = \frac{-a}{2(-2)} \Rightarrow a = -8 \\ 6 = -2(-2)^2 - 8(-2) + b \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 64 + 4 = 68$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳

اگر $x > \frac{3}{2}$ باشد مخرج کسر $\frac{x^2 - mx + 10}{2x - 3}$ همواره مثبت است پس نتیجه می‌گیریم صورت در فاصله $[a, 5]$ کوچک‌تر یا مساوی صفر است، یعنی تابع $f(x) = x^2 - mx + 10$ یک سهمی رو به بالاست که ریشه‌های آن برابر a و 5 می‌باشد.



$x = 5$ ریشه است یعنی $f(5) = 0$ می‌شود.

$$x^2 - mx + 10 = 0 \xrightarrow{x=5} 25 - 5m = 0 \Rightarrow m = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 10 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 5) = 0$$

بنابراین $a = 2$ است.

$$a \times m = 2 \times 5 = 10$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$a < \frac{-2x + 1}{5} < 2 \Rightarrow 5a < -2x + 1 < 10 \Rightarrow 5a - 1 < -2x < 14 \Rightarrow \frac{5a - 1}{-2} > x > -7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -7 \\ \frac{5a-1}{-2} = -1 \Rightarrow 5a - 1 = 2 \Rightarrow 5a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$a + b = \frac{3}{5} - 7 = \frac{3 - 35}{5} = \frac{-32}{5} = -6\frac{2}{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵

$$a(5 - a) = 2 \Rightarrow 5a - a^2 = 2 \Rightarrow a^2 - 5a = -2$$

$$(a - 8)(a - 4)(a - 1)(a + 3) = (a - 8)(a + 3)(a - 4)(a - 1)$$

$$= (a^2 - 5a - 24)(a^2 - 5a + 4) = (-2 - 24)(-2 + 4) = (-26)(2) = -52$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶

$$y = ax^2 + 3x + c$$

$$\text{معادله محور تقارن سهمی} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_s = \frac{-3}{2a} = -1 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$y_s = 1, x_s = -1 \quad \text{رأس سهمی روی خط } y = 1 \text{ است پس:}$$

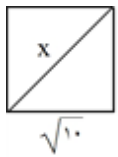
$$\Rightarrow \frac{3}{2}(-1)^2 + 3(-1) + c = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} - 3 + c = 1 \Rightarrow c = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow ac = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۷

اگر محیط مربع $4\sqrt{10}$ باشد، طول یک ضلع آن $\sqrt{10}$ خواهد بود. با توجه به شکل و با استفاده از قانون فیثاغورس داریم:



$$(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = x^2 \Rightarrow 10 + 10 = x^2$$

$$\Rightarrow 20 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{20} \Rightarrow x = \sqrt{4} \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸

پاسخ‌های معادله درجه ۲ از رابطه $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند. وقتی ریشه مضاعف باشد مقدار دلتا صفر است، بنابراین مقدار ریشه برابر است با:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

با توجه به معادله $7x^2 - 6x + k = 0$ ، مقدار b برابر ۶- و مقدار a برابر ۷ است (نیازی به پیدا کردن k نیست):

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-6)}{2(7)} = \frac{3}{7}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$y_c = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \Rightarrow \left| \frac{\Delta}{4a} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

چون $a > 0$ و $\Delta > 0$ داریم:

$$\frac{\Delta}{4a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \Delta = 12$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}} 2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{طول راس سهمی} = -3 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = -3 \Rightarrow b = 6a \\ y = ax^2 + bx + c \xrightarrow{\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix}} -7 = 9a - 3b + 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow -7 = 9a - 18a + 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 6$$

$$b - a = 6 - 1 = 5$$



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴