



۱) اگر  $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{8}$  باشد، مقدار  $\frac{x^2}{x^2+1}$  کدام است؟

$\frac{1}{30}$  ۴

$\frac{1}{62}$  ۳

$\frac{1}{64}$  ۲

$\frac{1}{66}$  ۱

۲) اگر  $A = \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$  باشد، حاصل  $\sqrt{2}A$  کدام است؟

۸ ۴

$\sqrt{8}$  ۳

۴ ۲

$\sqrt{6}$  ۱

۳) اگر  $a = (\sqrt[3]{4})^{1/6}$  و  $b = (\sqrt[3]{64})^{2/3}$  آنگاه  $a^2$  برابر است با:

$\frac{2}{\sqrt{b}}$  ۴

$\frac{1}{b}$  ۳

$\frac{2}{b}$  ۲

$\frac{1}{\sqrt{b}}$  ۱

۴) حاصل عبارت  $\left(1 - \frac{4x}{x^2+4x+4}\right) \div \left(\frac{2x-4}{x^2-4}\right)$  کدام است؟

$\frac{x^2-4}{2(x+2)^2}$  ۴

$\frac{x^2-8x+4}{2(x+2)}$  ۳

$\frac{x^2+8x+4}{2(x+2)}$  ۲

$\frac{x^2+4}{2(x+2)}$  ۱

۵) کدام عامل در تجزیه  $4a^4 + 16b^4$  وجود دارد؟

$2a^2 - 4b^2 - 4ab$  ۱    $2a^2 - 4b^2 + 4ab$  ۲    $2a^2 + 4b^2 + 4ab$  ۳   تجزیه پذیر نیست. ۴

۶) در بازنویسی  $(x+2)(x^2+4-4x)(x^2+2x+4)$  کدام یک از عبارت های زیر ظاهر می شود؟

$(x^2-8)$  ۴

$(x^2-16)$  ۳

$(x^2-8)$  ۲

$(x^2+4)$  ۱

۷) کدام گزینه تجزیه عبارت  $x^4y + 6x^3y^2 + 12x^2y^3 + 8xy^4$  است؟

$(xy+2y)^2$  ۴

$(x+2y)^4$  ۳

$xy(x+2y)^2$  ۲

$xy(2x+y)^2$  ۱

۸) شکل توانی عبارت  $\sqrt{2\sqrt{8\sqrt[5]{2}}}$  کدام است؟

$\frac{25}{20}$  ۴

$\frac{13}{20}$  ۳

$\frac{20}{24}$  ۲

$\frac{25}{24}$  ۱



۹ اگر  $A = \sqrt[4]{\sqrt[8]{18}}^{-1/5}$  باشد، حاصل  $(10 + A^{-1})^{-1/5}$  کدام است؟

- ۱ (۱) ۰/۷۵ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۲۵ (۴)

۱۰ ساده شده عبارت  $(x^5 - y^5)(x^5 + y^5)(x^5 + x^4y^5 + y^5)$  کدام است؟

$x^{15} - y^{15}$  (۱)  $x^{10} + 4x^5y^5 + y^{10}$  (۲)

$(x^5 - y^5)(x^5 + x^4y^5 + y^5)$  (۳)  $(x^5 - y^5)$  (۴)

۱۱ ریشه‌ی پنجم عدد مثبت  $a$ ، با ۸ برابر عدد  $a$  به توان  $\frac{6}{5}$  برابر است. جذر عدد  $\frac{1}{\sqrt{a}} + 3$  برابر کدام است؟

$\sqrt{2} + 1$  (۱)  $2\sqrt{2} + 1$  (۲)  $\sqrt{2} - 1$  (۳)  $2\sqrt{2} - 1$  (۴)

۱۲ اگر  $x^2 - 5x = 5\sqrt{x} - 5$  باشد، حاصل  $\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$  کدام است؟

$5\sqrt{2}$  (۱)  $7\sqrt{2}$  (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴)

۱۳ اگر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $-1 < a < b < 0$  باشد، کدام رابطه همواره برقرار است؟

$\left(\frac{1}{a}\right)^{-2n} < \left(\frac{1}{b}\right)^{-2n}$  (۱)  $-a^{-2n} < -b^{-2n}$  (۲)

$\left(\frac{1}{a}\right)^{2n} < \left(\frac{1}{b}\right)^{2n}$  (۳)  $a^{-2n} < b^{-2n}$  (۴)

۱۴ در صورتی که داشته باشیم  $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$ ، حاصل  $\frac{x^2 + 1}{x}$  کدام است؟ ( $x > 0$ )

$2\sqrt{2}$  (۲)  $14$  (۳)  $10\sqrt{2}$  (۴)  $\sqrt{6}$  (۱)

۱۵ اگر مساحت دایره‌ای  $\pi(5\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{256})$  باشد، محیط دایره کدام است؟

$12\pi$  (۱)  $6\pi\sqrt[4]{4}$  (۲)  $\pi\sqrt[4]{4}$  (۳)  $6\pi\sqrt[4]{4}$  (۴)

۱۶ ساده شده عبارت  $\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$  کدام است؟

$1 + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}$  (۱)  $\frac{1 + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}{1 - x}$  (۲)  $\frac{1 + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt{x}}$  (۳)  $1 - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}$  (۴)



۱۷) اگر  $A = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{243} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$  باشد، حاصل  $(5 + A)^{-\frac{1}{5}}$  کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{3}$  (۲)

$\frac{1}{2}$  (۱)

۱۸) حاصل عبارت  $9\sqrt{3+2\sqrt{2}} \times 3\sqrt[4]{17+13\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt[5]{99+70\sqrt{2}}}$  کدام است؟

$3^{1+\sqrt{2}}$  (۴)

$\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{2}-1}$  (۳)

$9^{1+\sqrt{2}}$  (۲)

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}-1}$  (۱)

۱۹) چند عدد صحیح وجود دارد که ریشه هفتم آنها در بازه  $(-2, 2)$  قرار می‌گیرد؟

۲۵۷ (۴)

۲۵۶ (۳)

۲۵۵ (۲)

۲۵۴ (۱)

۲۰) با فرض  $A = \sqrt[4]{2\sqrt{3} + 3}$  و  $B = \sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3}$  حاصل عبارت  $(A^x - AB + B^x)(A^x + AB + B^x)$  کدام است؟

$6\sqrt{3}$  (۴)

$5\sqrt{3}$  (۳)

$4\sqrt{3}$  (۲)

$3\sqrt{3}$  (۱)



۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{8} \Rightarrow \text{طرفین را معکوس می کنیم} : \frac{x^2 + 1}{x} = 8 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 8 \quad (1)$$

حال برای محاسبه‌ی حاصل عبارت مطلوب به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = t \xrightarrow{\text{طرفین را معکوس می کنیم}} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{1}{t} \xrightarrow{\text{تفکیک کسر ۱}} x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{t}$$

حال طبق اتحاد فرعی  $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$  خواهیم داشت:

$$\frac{1}{t} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 8^2 - 2 = 62 \Rightarrow t = \frac{1}{62}$$

۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \Rightarrow \sqrt{2}A = \sqrt{2}(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}) \\ &= \sqrt{10 + 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 - 4\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6} + 2)^2} - \sqrt{(\sqrt{6} - 2)^2} \\ &= |\sqrt{6} + 2| - |\sqrt{6} - 2| = \sqrt{6} + 2 - \sqrt{6} + 2 = 4 \end{aligned}$$

۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. a و b را به صورت توان گویا می‌نویسیم:

$$a = (\sqrt[3]{2^2})^{1/6} = \left(2^{2/3}\right)^{1/6} = 2^{1/9}$$

$$b = (\sqrt[3]{2^5})^{-1/6} = \left(2^{5/3}\right)^{-1/6} = 2^{-5/18} = 2^{-10/36}$$

$$a^2 = (2^{1/9})^2 = 2^{2/9} = (2^{-10/36})^{-1} = b^{-1} = \frac{1}{b} \quad \text{بنابراین:}$$

۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با مخرج مشترک گیری و تبدیل تقسیم به ضرب داریم:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{4x}{x^2 + 4x + 4}\right) \div \left(\frac{2x - 4}{x^2 - 4}\right) &= \left(1 - \frac{4x}{(x + 2)^2}\right) \times \left(\frac{(x - 2)(x + 2)}{2(x - 2)}\right) \\ &= \left(\frac{x^2 + 4x + 4 - 4x}{(x + 2)^2}\right) \times \left(\frac{(x - 2)(x + 2)}{2(x - 2)}\right) = \left(\frac{x^2 + 4}{(x + 2)^2}\right) \times \frac{1}{2} = \left(\frac{x^2 + 4}{2(x + 2)}\right) \end{aligned}$$

۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$4a^4 + 16b^4 - 2 \times 2a^2 \times 4b^2 + 2 \times 2a^2 \times 4b^2 \xrightarrow{\text{مربع دوجمله ای}} (2a^2 + 4b^2)^2 - 16a^2b^2$$

$$\xrightarrow{\text{مزدوج}} (2a^2 + 4b^2 - 4ab)(2a^2 + 4b^2 + 4ab)$$

۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای و مزدوج داریم:

$$\begin{aligned} (x + 2)(x^2 + 4 - 4x)(x^2 + 2x + 4) &= (x + 2)(x - 2)^2(x^2 + 2x + 4) \\ &= \frac{(x + 2)(x - 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x^2 - 4} = \frac{(x^2 - 4)(x^3 - 8)}{x^2 - 4} \end{aligned}$$

۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا با استفاده از فاکتورگیری و سپس با استفاده از مکعب دوجمله‌ای، داریم:

$$x^4 y + 6x^3 y^2 + 12x^2 y^3 + 8xy^4 = xy \frac{(x^3 + 6x^2 y + 12xy^2 + 8y^3)}{(x + 2y)^3} = xy (x + 2y)^3$$

۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{2} \sqrt[4]{8} \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{4 \times 8} \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{32} \sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2^5 \sqrt[3]{2}}$$

$$= ((2^5)(2))^{\frac{1}{15}} = 2^{\frac{26}{15}} = 2^{\frac{13}{10}}$$

۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \sqrt[3]{\sqrt[2]{2} \sqrt[3]{2^3} \times (2 \times 3^2)^{-\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{2} \times \sqrt[3]{2^3} \times 2^{-\frac{2}{3}} \times 3^{-2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{2}} \times 2 \times 2^{-\frac{2}{3}} \times 3^{-2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{2}{3}} \times 3^{-2} = 2^{-\frac{1}{6}} \times 3^{-2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{27} = \frac{1}{54} \Rightarrow A^{-1} = 54$$

$$(10 + A^{-1})^{-\frac{1}{2}} = (10 + 54)^{-\frac{1}{2}} = (64)^{-\frac{1}{2}} = 64^{-1} = \frac{1}{64} = 0.015625$$

۱۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا با استفاده از اتحاد چاق و لاغر و سپس با استفاده از اتحاد مزدوج رابطه به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$(x^2 - y^2)(x^6 + y^6)(x^4 + x^2 y^2 + y^4) = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + x^2 y^2 + y^4)(x^6 + y^6)}{x^6 - y^6}$$

$$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4$$

۱۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا  $a$  را محاسبه می‌کنیم.

$$a^{\frac{1}{5}} = 8 \times a^{\frac{4}{5}} \xrightarrow{\text{به توان ۵}} a = 8^5 \times a^4 = 1 \Rightarrow 8a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}} + 3} = \sqrt{2\sqrt{2} + 3} = \sqrt{2} + 1$$

۱۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{\underbrace{(x-1)(x-4)}_{\text{دسته بندی جدید}} \underbrace{(x-2)(x-3)}_{\text{دسته بندی جدید}}} = \sqrt{\underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{\text{فرض سوال}} \underbrace{(x^2 - 5x + 6)}_{\text{فرض سوال}}}$$

$$= \sqrt{(5\sqrt{2} - 5 + 4)(5\sqrt{2} - 5 + 6)} = \sqrt{(5\sqrt{2} - 1)(5\sqrt{2} + 1)}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \sqrt{50 - 1} = \sqrt{49} = 7$$

۱۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-1 < a < b < 0 \Rightarrow a^{2n} > b^{2n} \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{2n} < \left(\frac{1}{b}\right)^{2n}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا می‌دانیم که  $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$ ، حال به کمک اتحادهای کمکی داریم:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b) \Rightarrow x - \frac{1}{x} \\ &= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 3(\sqrt{x})\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &\Rightarrow x - \frac{1}{x} = 8 + 3(2) \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 14 \xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 196 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 198 \end{aligned}$$

حال برای یافتن  $x + \frac{1}{x}$  داریم:

$$A = x + \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{توان } 2} A^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 198 + 2 = 200 \Rightarrow A = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به فرمول مساحت دایره،  $S = \pi r^2$  داریم:

$$\begin{aligned} r^2 &= (5\sqrt{4} + \sqrt{256}) = (5\sqrt{4} + \sqrt{4^4}) = (5\sqrt{4} + 4\sqrt{4}) = 9\sqrt{4} \Rightarrow r = 3\sqrt{4} \\ P &= 2\pi r = 2\pi(3\sqrt{4}) = 6\pi\sqrt{4} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} \times \frac{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x})}{1-\sqrt{x}} = 1 + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^5} \times 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^3 \times 3^5} \times 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^8} \times 3^{\frac{1}{3}} \\ &= 3^{\frac{8}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^3 = 27 \Rightarrow (5+A)^{-\frac{1}{5}} = (32)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sqrt{3+2\sqrt{2}} &= \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} &= \sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})^3} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{99+70\sqrt{2}} &= \sqrt[3]{(3+2\sqrt{2})^3} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \\ 9^{1+\sqrt{2}} \times 3^{1+\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{1+\sqrt{2}} &= 3^{1+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} -2 < \sqrt{x} < 2 &\Rightarrow (-2)^2 < x < 2^2 \\ \Rightarrow -128 < x < 128 &\xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} \underbrace{-127, -126, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 127}_{255 \text{ عدد صحیح}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (A^x + B^x - AB)(A^x + B^x + AB) &= (A^x + B^x)^x - A^x B^x \\
 &= A^x + B^x + 2A^x B^x - A^x B^x = A^x + B^x + A^x B^x \\
 &= (2\sqrt{3} + 3) + (2\sqrt{3} - 3) + \sqrt{2\sqrt{3} + 3} \times \sqrt{2\sqrt{3} - 3} = 4\sqrt{3} + \sqrt{12 - 9} \\
 &= 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}
 \end{aligned}$$



# پاسخنامه کلیدی

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| ۱  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۶  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹  | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |